Całka podwójna i potrójna w obszarze regularnym. Całki iterowane.

Anna Bahyrycz

Całki podwójne

Definicja 1

- *R - prostokąt*
- *$R_1, R_2, \ldots, R_n$ - podział $\mathcal{P}$ prostokąta R na prostokąty o parami rozłącznych wnętrzach, które całkowicie wypełniają R*
- *prostokąt R_k ma wymiary $\Delta x_k \times \Delta y_k, \ \ k = 1, 2, \ldots, n$*
- *$d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ - długość przekątnej prostokąta R_k*
- *$\delta(\mathcal{P}) = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ - średnica podziału $\mathcal{P}$*
- *wybieramy punkty pośrednie $(x_k^*, y_k^*) \in R_k, \ \ k = 1, 2, \ldots, n$*

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją ograniczoną na prostokącie R. Całkę podwójną z funkcji f po prostokącie R definiujemy następująco:

$$\iint_R f(x,y)\, dxdy := \lim_{\delta(\mathcal{P}_n)\to\, 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k \Delta y_k$$

o ile granica jest właściwa i nie zależy od sposobu podziału prostokąta R i wyboru punktów pośrednich.
Mówimy wtedy, że funkcja $f(x,y)$ jest całkowalna na R.

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła na prostokącie R, to jest całkowalna na R.

Twierdzenie 2 (o liniowości całki)

Jeżeli f i g są całkowalne na prostokącie R i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to

$$\iint_R \alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\, dxdy = \alpha \iint_R f(x,y)\, dxdy + \beta \iint_R g(x,y)\, dxdy.$$

Twierdzenie 3 (o addytywności całki względem obszaru całkowania)

Jeżeli f jest całkowalna na prostokącie R oraz $R = R_1 \cup R_2$, gdzie R_1, R_2 to prostokąty o rozłącznych wnętrzach, to

$$\iint_R f(x,y)\, dxdy = \iint_{R_1} f(x,y)\, dxdy + \iint_{R_2} f(x,y)\, dxdy.$$

Twierdzenie 4 (o zamianie całki podwójnej na całki iterowane)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostokącie $R = [a,b] \times [c,d]$, to

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\, dy\Big] dx = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\, dx\Big] dy.$$

Przykład 1

Oblicz

$$\iint_{[0,2]\times[-1,1]} y^3 e^{x^2}\, dxdy = \int_0^2 \Big[\int_{-1}^1 e^{x^2} y^3\, dy\Big] dx = \int_0^2 \Big[\frac{1}{4} e^{x^2} y^4\Big]_{-1}^1 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 e^{x^2}(1-1)dx = 0$$

Twierdzenie 5

Jeżeli f jest funkcją o rozdzielonych zmiennych postaci $f(x,y)=g(x)h(y)$, gdzie funkcja $g(x)$ jest ciągła na $[a,b]$, zaś $h(y)$ jest ciągła na $[c,d]$, to

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \Big(\int_a^b g(x)\,dx\Big)\cdot\Big(\int_c^d h(y)\,dy\Big).$$

Przykład 2

Zamień na sumę iloczynów całek pojedynczych

$$\iint_{[1,3]\times[1,e]}\Big(\frac{2y^2}{x^3}+\frac{3x}{y}\Big)\,dxdy$$

$$=2\Big(\int_1^3 \frac{1}{x^3}\,dx\Big)\cdot\Big(\int_1^e y^2\,dy\Big)+3\Big(\int_1^3 x\,dx\Big)\cdot\Big(\int_1^e \frac{1}{y}\,dy\Big).$$

Twierdzenie 6

Niech obszar D ma postać:

$$D=\{(x,y): a\leqslant x\leqslant b,\ d(x)\leqslant y\leqslant g(x)\},$$

gdzie $d(x), g(x)$ są funkcjami ciągłymi na $[a,b]$ i $d(x)<g(x)$ dla $x\in(a,b)$
(jest to tzw. obszar normalny względem osi 0x).
Jeżeli $f(x,y)$ jest ciągła na obszarze D, to

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\Big[\int_{d(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy\Big]dx.$$

Twierdzenie 7

Niech obszar D ma postać:

$$D=\{(x,y): c\leqslant y\leqslant d,\ p(y)\leqslant x\leqslant q(y)\},$$

gdzie $p(y), q(y)$ są funkcjami ciągłymi na $[c,d]$ i $p(y)<q(y)$ dla $y\in(c,d)$
(jest to tzw. obszar normalny względem osi 0y).
Jeżeli $f(x,y)$ jest ciągła na obszarze D, to

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\Big[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx\Big]dy.$$

Definicja 2

Niech

- *D będzie obszarem ograniczonym na płaszczyźnie,*
- *$f(x,y)$ będzie funkcją określoną i ograniczoną na D,*
- *R dowolnym prostokątem takim, że $D\subset R$.*

Definiujemy rozszerzenie funkcji f na prostokąt R:

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \text{dla } (x,y)\in D\\ 0 & \text{dla } (x,y)\in R\setminus D\end{cases}.$$

Całkę podwójną z funkcji f po obszarze D definiujemy wzorem:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_R f^*(x,y)\,dxdy,$$

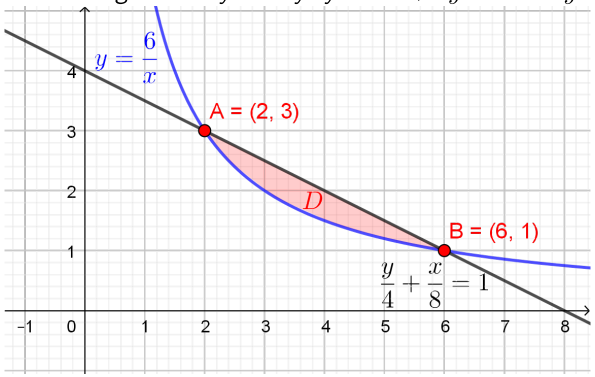
o ile całka po prostokącie R istnieje.
Mówimy wtedy, że funkcja f jest całkowalna na D.

Uwaga 1

Całka $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ nie zależy od wyboru prostokąta R.

Przykład 3

Zamienić na całki iterowane całkę podwójną z funkcji f całkowalnej na obszarze D ograniczonym krzywymi: $x+2y=8$ i $xy=6$.



D jest obszarem normalnym względem obu osi

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_2^6\Big[\int_{\frac{6}{x}}^{4-\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy\Big]dx=\int_1^3\Big[\int_{\frac{6}{y}}^{8-2y} f(x,y)\,dx\Big]dy$$

Definicja 3

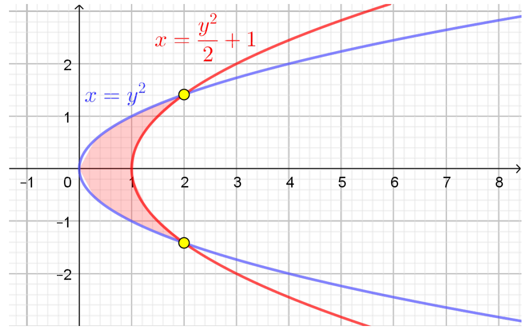
Sumę skończonej liczby obszarów normalnych (względem osi $0x$ lub $0y$) o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy obszarem regularnym na płaszczyźnie.

Twierdzenie 8

Całki po obszarach regularnych mają te same własności co całki po prostokątach, tzn. liniowość, addytywność względem obszaru całkowania.

Przykład 4

Zamienić na całki iterowane całkę podwójną z funkcji f całkowalnej na obszarze D ograniczonym krzywymi: $x = y^2$ i $x = \frac{y^2}{2} + 1$.



D jest obszarem normalnym względem osi Oy

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \Big[\int_{y^2}^{\frac{y^2}{2}+1} f(x,y)\,dx\Big] dy$$

$$= \int_0^1 \Big[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\Big]dx + \int_1^2 \Big[\int_{\sqrt{2(x-1)}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\Big]dx + \int_1^2 \Big[\int_{-\sqrt{x}}^{-\sqrt{2(x-1)}} f(x,y)\,dy\Big]dx$$

Całki potrójne

Definicja 4

- *P - prostopadłościan*
- *$P_1, P_2, \ldots, P_n$ - podział $\mathcal{P}$ prostopadłościanu P na prostopadłościany o parami rozłącznych wnętrzach, które całkowicie wypełniają P*
- *prostopadłościan P_k ma wymiary $\Delta x_k \times \Delta y_k \times \Delta z_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$*
- *$d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2}$ - długość przekątnej prostopadłościanu P_k*
- *$\delta(\mathcal{P}) = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ - średnica podziału $\mathcal{P}$*
- *wybieramy punkty pośrednie $(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \in P_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$*

Niech $f(x,y,z)$ będzie funkcją ograniczoną na prostopadłościanie P. Całka potrójna z funkcji f po prostopadłościanie P to:

$$\iiint_P f(x,y,z)\,dxdydz := \lim_{\delta(\mathcal{P}_n)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$$

o ile granica jest właściwa i nie zależy od sposobu podziału prostopadłościanu P
i wyboru punktów pośrednich.
Mówimy wtedy, że funkcja $f(x,y,z)$ jest całkowalna na P.

Twierdzenie 9

Jeżeli funkcja $f(x,y,z)$ jest ciągła na prostopadłościan P, to jest całkowalna na P.

Twierdzenie 10 (o liniowości całki)

Jeżeli f i g są całkowalne na prostopadłościanie P i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to

$$\iiint_P \alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \alpha \iiint_P f(x,y,z)\,dxdydz + \beta \iiint_P g(x,y,z)\,dxdydz.$$

Twierdzenie 11 (o addytywności całki względem obszaru całkowania)

Jeżeli f jest całkowalna na prostopadłościanie P oraz $P = P_1 \cup P_2$, gdzie P_1, P_2 to prostopadłościany o rozłącznych wnętrzach, to

$$\iiint_P f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{P_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_{P_2} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Twierdzenie 12 (o zamianie całki potrójnej na całki iterowane)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostopadłościanie $P = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$, *to*

$$\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b \Big\{ \int_c^d \Big[\int_p^q f(x, y, z)\, dz \Big]\, dy \Big\} dx.$$

Uwaga 2

Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także wtedy, gdy po prawej stronie równości napiszemy dowolną całkę iterowaną.

Twierdzenie 13

Jeżeli f jest funkcją o rozdzielonych zmiennych postaci $f(x, y, z) = g(x)h(y)k(z)$, *gdzie funkcje g, h, k są ciągłe odpowiednio na przedziałach* $[a, b]$, $[c, d]$ *i* $[p, q]$, *to*

$$\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} f(x, y, z)\, dxdydz = \Big(\int_a^b g(x)\, dx \Big) \cdot \Big(\int_c^d h(y)\, dy \Big) \cdot \Big(\int_p^q k(z)\, dz \Big).$$

Przykład 6

Zamień iloczyn całek pojedynczych

$$\iiint_P \ln x^{yz}\, dxdydz, \qquad P = [1, e] \times [1, 2] \times [2, 3].$$

$$\iiint_{[1,e]\times[1,2]\times[2,3]} \ln x^{yz}\, dxdydz = \int_2^3 \Big\{ \int_1^2 \Big[\int_1^e yz \ln x\, dx \Big]\, dy \Big\} dz$$

$$= \Big(\int_1^e \ln x\, dx \Big) \cdot \Big(\int_1^2 y\, dy \Big) \cdot \Big(\int_2^3 z\, dz \Big).$$

Przykład 5

Oblicz

$$\iiint_P xz \sin(xy)\, dxdydz, \qquad P = \Big[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\Big] \times [0, \pi] \times [0, 1].$$

$$\iiint_{[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]\times[0,\pi]\times[0,1]} xz \sin(xy)\, dxdydz = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \Big\{ \int_0^{\pi} \Big[\int_0^1 zx \sin(xy)\, dz \Big]\, dy \Big\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \Big\{ \int_0^{\pi} x \sin(xy) \Big[z^2 \Big]_{z=0}^{z=1} dy \Big\} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \Big\{ \int_0^{\pi} x \sin(xy)\, dy \Big\} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \Big\{ x \cdot \frac{1}{x} \big[\cos(xy) \big]_{y=0}^{y=\pi} \Big\} dx = -\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (\cos(\pi x) - 1) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \Big[\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) - x \Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \Big) + \frac{1}{12}$$

Definicja 5

Niech

- *U będzie obszarem ograniczonym w przestrzeni,*
- *$f(x, y, z)$ będzie funkcją określoną i ograniczoną na U,*
- *definiujemy rozszerzenie funkcji f na prostopadłościan P:*

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{dla } (x, y, z) \in U \\ 0 & \text{dla } (x, y, z) \in P \setminus U \end{cases}.$$

Całkę potrójną z funkcji f po obszarze U definiujemy wzorem:

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_P f^*(x, y, z)\, dxdydz,$$

o ile całka po prostopadłościanie P istnieje.
Mówimy wtedy, że funkcja f jest całkowalna na U.

Uwaga 3

Całka $\iiint_U f(x, y, z)\, dxdydz$ nie zależy od wyboru prostopadłościanu P.

Twierdzenie 14

Niech obszar U ma postać:

$$U = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy},\ d(x, y) \leqslant z \leqslant g(x, y)\},$$

gdzie $d(x, y), g(x, y)$ są funkcjami ciągłymi na obszarze regularnym D_{xy} i $d(x, y) < g(x, y)$ dla punktów (x, y) należących do wnętrza D_{xy} (jest to tzw. obszar normalny względem płaszczyzny x0y). Jeżeli $f(x, y, z)$ jest ciągła na obszarze U, to

$$\iiint_U f(x, y, z)\ dxdydz = \iint_{D_{xy}} \Big[\int_{d(x,y)}^{g(x,y)} f(x, y, z)\ dz\Big] dxdy.$$

Uwaga 4

Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia dotyczące obszarów normalnych względem pozostałych płaszczyzn układu współrzędnych $(x0z,\ y0z)$.

Przykład 8

Obliczyć całkę potrójną z Przykładu 7 przyjmując $f(x, y, z) = x$.

$$\iiint_U f(x, y, z)\ dxdydz = \int_0^6 \Big\{ \int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \Big[\int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} x\ dz \Big]\ dy \Big\} dx$$

$$= \int_0^6 \Big\{ \int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \Big[x(3 - \frac{x}{2} - \frac{3y}{4}) \Big]\ dy \Big\} dx$$

$$= \int_0^6 \Big\{ \frac{x^3}{6} - 2x^2 + 6x \Big\} dx$$

$$= \Big[\frac{x^4}{24} - \frac{2x^3}{3} + 3x^2 \Big]_0^6 = \frac{6^3}{4} - \frac{2 \cdot 6^3}{3} + 3 \cdot 6^2$$

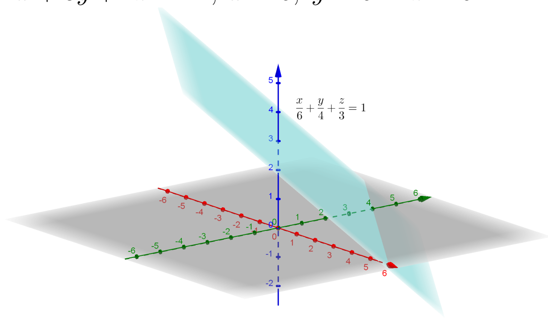
$$6^2 \Big(\frac{3}{2} - 4 + 3 \Big) = 18$$

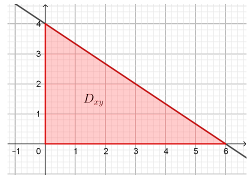
$$\int_0^{-\frac{2x}{3}+4} (3x - \frac{x^2}{2} - \frac{3yx}{4})\ dy = \Big[3xy - \frac{x^2 y}{2} - \frac{3y^2 x}{8} \Big]_{y=0}^{y=-\frac{2x}{3}+4}$$

$$= 3x(4 - \frac{2x}{3}) - \frac{x^2}{2}(4 - \frac{2x}{3}) - \frac{3x}{8}(4 - \frac{2x}{3})^2$$

Przykład 7

Całkę potrójną $\iiint_U f(x, y, z)\ dxdydz$ zamienić na całki iterowane jeżeli obszar U ograniczony jest powierzchniami:
$2x + 3y + 4z = 12,\ x = 0,\ y = 0$ *i* $z = 0.$





$$\iiint_U f(x, y, z)\ dxdydz = \iint_{D_{xy}} \Big[\int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} f(x, y, z)\ dz \Big] dxdy$$

$$\int^6 \quad \int^{-\frac{2x}{3}+4} \quad \int^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}}$$

Definicja 6

Sumę skończonej liczby obszarów normalnych względem płaszczyzn układu współrzędnych o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy obszarem regularnym w przestrzeni.

Twierdzenie 15

Całki po obszarach regularnych mają te same własności co całki po prostopadłościanach, tzn. liniowość, addytywność względem obszaru całkowania.